Prof. Dr. Alfred Toth

Die Lah-Zahlen für n = 4 als morphogrammatisches Fragment der tetradischen quantitativen Semiotik

1. In Toth (2019) hatten wir gezeigt, daß man eine Morphogrammatik für K = 4 nicht nur durch Stirling-Zahlen 2. Art, sondern auch durch Lah-Zahlen konstruieren kann, bei denen die Ordnung der Elemente der Teilmengen relevant ist.

L(4, 1) =

{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 3, 2}
{0, 2, 1, 3}	{0, 2, 3, 1}
{0, 3, 1, 2}	{0, 3, 2, 1}
{1, 0, 2, 3}	{1, 0, 3, 2}
{1, 2, 0, 3}	{1, 2, 3, 0}
{1, 3, 0, 2}	{1, 3, 2, 0}
{2, 0, 1, 3}	{2, 0, 3, 1}
{2, 1, 0, 3}	{2, 1, 3, 0}
{2, 3, 0, 1}	{2, 3, 1, 0}
{3, 0, 1, 2}	{3, 0, 2, 1}
{3, 1, 0, 2}	{3, 1, 2, 0}
{3, 2, 0, 1}	{3, 2, 1, 0}

L(4, 2) =

{{0}, {1, 2, 3}}	{{0}, {1, 3, 2}}
{{0}, {2, 1, 3}}	{{0}, {2, 3, 1}}
{{0}, {3, 1, 2}}	{{0}, {3, 2, 1}}
{{1}, {0, 2, 3}}	{{1}, {0, 3, 2}}
{{1}, {2, 0, 3}}	{{1}, {2, 3, 0}}

$\{\{1\},\{3,0,2\}\}$ $\{\{1\},\{3,2,0\}\}$

$\{\{2\},\{0,1,3\}\}$ $\{\{2\},\{0,3,1\}\}$

$\{\{2\},\{1,0,3\}\}$ $\{\{2\},\{1,3,0\}\}$

$\{\{2\},\{3,0,1\}\}$ $\{\{2\},\{3,1,0\}\}$

$\{\{3\},\{0,1,2\}\}$ $\{\{3\},\{0,2,1\}\}$

$\{\{3\},\{1,0,2\}\}$ $\{\{3\},\{1,2,0\}\}$

$\{\{3\},\{2,0,1\}\}$ $\{\{3\},\{2,1,0\}\}$

$\{\{0,1\},\{2,3\}\}$ $\{\{0,1\},\{3,2\}\}$

$\{\{1,2\},\{0,3\}\}$ $\{\{1,2\},\{3,0\}\}$

$\{\{2,3\},\{0,1\}\}$ $\{\{2,3\},\{1,0\}\}$

$\{\{0,2\},\{1,3\}\}$ $\{\{0,2\},\{3,1\}\}$

$\{\{1,3\},\{0,2\}\}$ $\{\{1,3\},\{2,0\}\}$

$\{\{0,3\},\{1,2\}\}$ $\{\{0,3\},\{2,1\}\}$

$L(4,3) =$

$\{\{0\},\{1\},\{2,3\}\}$ $\{\{0\},\{1\},\{3,2\}\}$

$\{\{1\},\{2\},\{0,3\}\}$ $\{\{1\},\{2\},\{3,0\}\}$

$\{\{2\},\{3\},\{0,1\}\}$ $\{\{2\},\{3\},\{1,0\}\}$

$\{\{0\},\{2\},\{1,3\}\}$ $\{\{0\},\{2\},\{3,1\}\}$

$\{\{1\},\{3\},\{0,2\}\}$ $\{\{1\},\{3\},\{2,0\}\}$

$\{\{0\},\{3\},\{1,2\}\}$ $\{\{0\},\{3\},\{2,1\}\}$

$L(4,4) = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\}\}$

2. Genauso, wie jedoch die Stirling-Zahlen 1. und 2. Art Teilmengen der Menge aller Permutationen einer Menge von n Elementen sind, ist, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch die Menge der Lah-Zahlen L(n, k) eine Teilmenge aller möglichen Permutationen, wenn eine n-elementige Menge in k Zyklen partitioniert wird. Das bedeutet aber, daß die morphogrammatische Basis in Lah-Zahlen ein Fragment der Menge aller 4-wertigen Relationen in k geordneten Teilmengen einer nicht-qualitativen Semiotik ist.

2.1. L(4, 1) =

{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 3, 2}
{0, 2, 1, 3}	{0, 2, 3, 1}
{0, 3, 1, 2}	{0, 3, 2, 1}
{1, 0, 2, 3}	{1, 0, 3, 2}
{1, 2, 0, 3}	{1, 2, 3, 0}
{1, 3, 0, 2}	{1, 3, 2, 0}
{2, 0, 1, 3}	{2, 0, 3, 1}
{2, 1, 0, 3}	{2, 1, 3, 0}
{2, 3, 0, 1}	{2, 3, 1, 0}
{3, 0, 1, 2}	{3, 0, 2, 1}
{3, 1, 0, 2}	{3, 1, 2, 0}
{3, 2, 0, 1}	{3, 2, 1, 0}

Da L(4, 1) nichts anderes als die Permutationen 4! sind, ist L(4, 1) = P(n).

2.2. L(4, 2) =

{{0}, {1, 2, 3}}	{{0}, {1, 3, 2}}
{{0}, {2, 1, 3}}	{{0}, {2, 3, 1}}
{{0}, {3, 1, 2}}	{{0}, {3, 2, 1}}
{{1}, {0, 2, 3}}	{{1}, {0, 3, 2}}
{{1}, {2, 0, 3}}	{{1}, {2, 3, 0}}

{{1}, {3, 0, 2}}   {{1}, {3, 2, 0}}

{{2}, {0, 1, 3}}   {{2}, {0, 3, 1}}

{{2}, {1, 0, 3}}   {{2}, {1, 3, 0}}

{{2}, {3, 0, 1}}   {{2}, {3, 1, 0}}

{{3}, {0, 1, 2}}   {{3}, {0, 2, 1}}

{{3}, {1, 0, 2}}   {{3}, {1, 2, 0}}

{{3}, {2, 0, 1}}   {{3}, {2, 1, 0}}

Bei k = 3 = (1, 3) stimmt wieder L(n, 2) mit der Menge der Permutationen überein. Bei k = 2 (2) hingegen gibt es für jede Partition der From

{{a, b}, {c, d}}

die folgenden 4 mal 4 = 16 Permutationen

{{a, b}, {c, d}}   {{a, b}, {d, c}}

{{a, b}, {d, c}}   {{a, b}, {c, d}}

{{b, a}, {c, d}}   {{b, a}, {d, c}}

{{b, a}, {c, d}}   {{b, a}, {c, d}},

so daß also die Menge der 6 L(4, 2)-Permutationen eine Teilmenge der 16 mal 6 = 96 möglichen Kombinationen ist.

2.3. L(4, 3)

Bei 3 zyklischen Ordnungen der Form

{{a}, {b}, {c, d}}

ergeben sich die folgenden möglichen Permutationen

{{a}, {b}, {c, d}}

{{a}, {b}, {d, c}}

{{b}, {a}, {c, d}}

{{b}, {a}, {d, c}},

bei denen nun die Ordnung der Zyklen ebenfalls permutiert werden kann, und zwar gibt es bei k = 3 natürlich 3! = 6 Permutationen. Insgesamt ergeben sich also 4 mal 6 = 24 Permutationen für alle 6 L(4,3)-Zahlen, d.h. 6 mal 24 = 144 Kombinationen.

2.4. L(4, 4)

{{0}, {1}, {2}, {3}}

Hier gibt es natürlich, da wiederum die Zyklen selbst permutierbar sind, 4! = 24 mögliche Permutationen.

Insgesamt stellen die 73 Lah-Zahlen für n = 4 also eine Teilmenge von 312 möglichen Permutationen dar.

Literatur

Toth, Alfred, Skizzen einer Morphogrammatik mit Lah-Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2019

29.7.2019